

Cours d'Algèbre Linéaire

par

Samuel BOWONG

Université de Douala

Année Académique 2020-2021

Table des matières

1	Espaces vectoriels	3
1.1	Définition et exemples	3
1.2	Sous-espaces vectoriels	5
1.3	Combinaisons linéaires	6
1.4	Familles génératrices	7
1.5	Familles libres	8
1.6	Bases d'un espace vectoriel	9
1.6.1	Définition, exemples	9
1.6.2	Dimension d'un espace vectoriel	10
1.7	Coordonnées d'un vecteur	11
1.8	Comment extraire une base d'une famille génératrice ?	11
1.9	Comment trouver une base d'un espace vectoriel donné par un système d'équations ?	12
1.10	Travaux dirigés sur les Espaces vectoriels	13
2	Les matrices	15
2.1	L'espace vectoriel des matrices	15
2.1.1	Opérations sur les matrices	16
2.2	Matrices Carrées	19
2.2.1	Diagonale et Trace d'une matrice carrée	19
2.2.2	Matrices carrées particulières	20
2.2.3	Matrices inversibles	21
2.3	Rang d'une matrice	22
2.4	Travaux dirigés sur le calcul matriciel	23
3	Applications linéaires	25
3.1	Définitions et Exemples	25
3.2	Noyau et Image d'une application linéaire	27
3.3	Application linéaire en dimension finie	30
3.4	Matrice d'une application linéaire	31
3.5	Fiche de TD sur les applications linéaires	35
4	Les Déterminants des Matrices carrées	38
4.1	Définition récursive du déterminant	38
4.2	Propriétés des déterminants	40
4.2.1	Déterminant d'une famille de vecteurs	41
4.3	Sous matrices Mineurs et Mineurs principaux	41
4.4	Applications du calcul du déterminant	42
4.4.1	Inverse d'une Matrice	42
4.4.2	Déterminant d'un système de n vecteurs en dimension n	43

4.5	TD sur le déterminant	44
5	Systèmes Linéaires	46
5.1	Les différentes présentations d'un système d'équations linéaires	46
5.1.1	Présentation classique	46
5.1.2	Ecriture matricielle d'un système	46
5.1.3	Avec une application linéaire	47
5.2	Systèmes de Cramer	47
5.3	Résolution d'un système. Structure de l'ensemble des solutions	49
5.3.1	Structure de l'ensemble des solutions	49
5.4	Méthodes de résolution d'un système linéaire : Méthode du pivot de Gauss . . .	50
5.5	TD sur les systèmes linéaires	52

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Définition et exemples

Soit E un ensemble. On suppose que l'on sait additionner les éléments de E entre eux, et qu'on obtient alors un élément de E . On note

$$a + b$$

la somme des éléments a et b de E . On suppose aussi que l'on sait multiplier un élément de E quelconque par un réel ou complexe, et que l'on obtient ainsi un élément de E . On note

$$\lambda \cdot a$$

le produit du réel ou complexe λ et de $a \in E$. Dans ces conditions, on dit que "+" est une loi de composition interne sur E , et que "." est une loi de composition externe sur $\mathbb{K} \times E$.

Exemple 1.1.1 Soit $E = \mathbb{R}$. On sait ajouter deux éléments de $\mathbb{R}$, et multiplier un élément de $\mathbb{R}$ par un élément de $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1.2 Soit $E = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire l'ensemble des n -uplets de la forme $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}$. Les nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont appelés composantes du n -uplet $(x_1; x_2; \dots; x_n)$. On sait ajouter deux n -uplets, suivant la définition

$$(x_1; x_2; \dots; x_n) + (y_1; y_2; \dots; y_n) := (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n);$$

c'est-à-dire composante par composante. On sait aussi multiplier un n -uplet par un réel :

$$\lambda \cdot (x_1; x_2; \dots; x_n) := (\lambda x_1; \lambda x_2; \dots; \lambda x_n)$$

Il s'agit là encore de multiplier chacune des composantes par λ

Exemple 1.1.3 Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace. On se rappelle qu'un vecteur non-nul est la donnée d'une direction, d'un sens et d'une longueur. Si $\vec{v}$ est le vecteur nul, $\lambda \cdot \vec{v}$ est le vecteur nul pour tout réel λ . Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} \in \mathcal{V}$ non-nul, le vecteur $\lambda \cdot \vec{v}$ est le vecteur nul si $\lambda = 0$, et pour $\lambda \neq 0$,

- le vecteur de même direction que $\vec{v}$,
- de même sens que $\vec{v}$ si $\lambda > 0$ et de sens opposé si $\lambda < 0$
- de longueur $|\lambda|$ fois la longueur de $\vec{v}$.

On sait aussi ajouter deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$: on trace un représentant de $\vec{v}$ en partant de l'extrémité d'un représentant de $\vec{u}$.

Exemple 1.1.4 Soit X un ensemble quelconque, et $\mathcal{F}(X; R)$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$. La somme $h = f + g$ de deux fonctions f et g est la fonction définie par

$$h : x \longmapsto f(x) + g(x).$$

Le produit $k = \lambda \cdot f$ de la fonction f par un réel λ est la fonction définie par

$$k : x \longmapsto \lambda \cdot f(x).$$

Ces définitions sont les définitions usuelles dans le cas de $X = R$.

Définition 1.1.1 Soit $(E; +; \cdot)$ un triplet constitué d'un ensemble E , d'une loi de composition interne "+" sur E et d'une loi de composition externe "." sur E . On dit que $(E; +; \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ lorsque les lois "+" et "." vérifient les huit propriétés suivantes :

1. Pour tous a, b de E ,

$$a + b = b + a$$

2. Pour tous a, b et c de E ,

$$a + (b + c) = (a + b) + c .$$

3. Il existe un élément e de E tel que pour tout a de E ,

$$a + e = e + a = a .$$

4. Pour tout a de E , il existe un élément b de E tel que

$$a + b = b + a = e .$$

N . Pour tout a de E ,

$$1 \cdot a = a .$$

A . Pour tous réels λ et μ , et tout $a \in E$,

$$\lambda \cdot (\mu \cdot a) = (\lambda \mu) \cdot a .$$

D_1 . Pour tous réels λ et μ , et tout $a \in E$,

$$(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a .$$

D_2 . Pour tous a, b de E et tout réel λ ,

$$\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b .$$

Lorsque la propriété (1) est vérifiée, on dit que la loi "+" est commutative. Si la propriété (2) est vérifiée, on dit que la loi "+" est associative. L'élément e de la propriété (3) est appelé élément neutre pour la loi "+". On le note la plupart du temps 0_E où même 0 .

Remarque 1.1.1 Il ne peut y avoir qu'un seul élément neutre pour une loi interne : si e_1 et e_2 sont éléments neutres, on a

$$e_1 = e_1 + e_2 = e_2 .$$

L'élément b de la propriété (4) s'il existe est lui aussi nécessairement unique :

$$b_2 = b_2 + e = b_2 + (a + b_1) = (b_2 + a) + b_1 = b_1 .$$

Le cas échéant, on l'appelle symétrique de a , et on le note $b = -a$

Définition 1.1.2 Lorsque les propriétés (1) à (4) sont vérifiées, on dit que $(E; +)$ est un groupe commutatif.

Lorsque la propriété (N) est vérifiée, on dit que le réel 1 est l'élément neutre pour la loi externe. On dit que la loi externe est associative lorsque (A) est vraie. Les deux dernières propriétés (D_1) et (D_2) sont des propriétés de distributivité. On reprend les exemples précédents, et on montre que l'on a bien affaire à des espaces vectoriels.

Exemple 1.1.5 Dans $E = \mathbb{R}$, l'addition et la multiplication usuelles possèdent bien les huit propriétés de la définition : $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ est un espace vectoriel.

Exemple 1.1.6 Dans $E = \mathbb{R}^n$, les deux lois de compositions définies ci-dessus ont aussi les huit propriétés de la définition. En effet les opérations sont définies composante par composante, donc il suffit de vérifier leurs propriétés composante par composante, et l'on se retrouve alors dans $(\mathbb{R}; +; \cdot)$. On notera que l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}^n$ est

$$0_{\mathbb{R}^n} = (0; 0; \dots; 0);$$

et le symétrique du n -uplet $a = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ et

$$b = -a = (-x_1; -x_2; \dots; -x_n).$$

Exemple 1.1.7 L'ensemble $\mathcal{F}(X; R)$ muni des deux opérations définies dans l'exemple 1.1.4 est un espace vectoriel. Là encore on se ramène aux propriétés équivalentes dans $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ qui est cette fois l'espace d'arrivée des fonctions de $\mathcal{F}(X; R)$. L'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{F}(X; R)$ est la fonction nulle $0_{\mathcal{F}(X; R)} : x \mapsto 0$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2.1 Soit $(E; +; \cdot)$ un espace vectoriel, et F une partie de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel de E lorsque les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) Le vecteur nul 0_E de E appartient à F .
- (ii) Pour tout réel λ et tout élément v de F , $\lambda \cdot v$ est aussi un élément de F .
- (iii) Pour tous éléments a et b de F , $a + b$ est aussi un élément de F .

Exemple 1.2.1

Dans $(\mathbb{R}; +; \cdot)$, les seuls sous espaces vectoriels sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$ lui-même.

Exemple 1.2.2 L'ensemble $F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet :

- $(0; 0) \in F$ car
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x; y) \in F$ alors on a

$$\lambda x + \lambda y = \lambda \cdot (x + y) = 0;$$

ce qui prouve que $\lambda(x; y) = (\lambda x; \lambda y) \in F$.

- Si $(x; y)$ et $(x_0; y_0)$ appartiennent à F alors

$$(x + x_0) + (y + y_0) = (x + y) + (x_0 + y_0) = 0 + 0 = 0,$$

ce qui prouve que $(x; y) + (x_0; y_0) = (x + x_0; y + y_0)$ appartient à F .

Attention, l'ensemble $G = \{(x; y) \in R^2; x + y = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de R^2 . En fait cet ensemble ne vérifie aucune des propriétés de la définition précédente.

Remarque 1.2.1 L'ensemble $F = \{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de n'importe quel espace vectoriel E . En effet $0_E + 0_E = 0_E$ et $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On parle du sous-espace vectoriel nul.

Remarque 1.2.2 Pour montrer qu'un ensemble muni de deux lois est un espace vectoriel, on a toujours intérêt à démontrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu qui le contient. Il n'y a alors que trois propriétés à démontrer, au lieu des huit propriétés de la définition.

1.3 Combinaisons linéaires

Définition 1.3.1 Soit $u_1; u_2; \dots; u_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel $(E; +; \cdot)$. On dit que $v \in E$ est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1; u_2; \dots; u_n$ lorsqu'il existe des réels $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n$ tels que

$$v = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_n \cdot u_n$$

Il est parfois commode d'utiliser une notation plus compacte pour écrire les combinaisons linéaires, ou de manière plus générale, les sommes. Pour des vecteurs (ou des réels) $u_1, u_2, \dots, u_n$, on écrit

$$X = \sum_{j=1}^n u_j = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Avec cette notation la combinaison linéaire ci-dessus s'écrit

$$v = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j .$$

Exemple 1.3.1 Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $u = (3; 3; 1)$ est-il combinaison linéaire de $v_1 = (1; 1; 0)$ et $v_2 = (1; 1; 1)$?

Il s'agit de savoir s'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$\lambda_1 \cdot (1; 1; 0) + \lambda_2 \cdot (1; 1; 1) = (3; 3; 1) .$$

On est donc amené à résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_2 &= 1 \end{cases}$$

Ce système a une (unique) solution $(\lambda_1; \lambda_2) = (2; 1)$, donc $u = 2v_1 + v_2$ est bien combinaison linéaire de v_1 et v_2 .

Exemple 1.3.2 A quelle condition le vecteur $w = (a; b; c)$ est-il une combinaison linéaire de $u = (1; 2; -1)$ et $v = (6; 4; 2)$?

C'est le cas si et seulement si il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$\lambda_1 \cdot (1; 2; -1) + \lambda_2 \cdot (6; 4; 2) = (a; b; c).$$

Il s'agit donc de savoir à quelle condition sur $a; b$ et c le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 6\lambda_2 &= a \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= b \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 &= c \end{cases}$$

admet des solutions. On applique la méthode du pivot à ce système et on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} \lambda_1 + 6\lambda_2 &= a \\ -8\lambda_2 &= b - 2a \\ 0 &= c - a + b \end{cases}$$

Ce système a donc une solution si et seulement si le dernier second membre est nul, c'est-à-dire

$$c - a + b = 0.$$

On vient de trouver une équation cartésienne de l'ensemble des solutions du système.

1.4 Familles génératrices

Proposition 1.4.1 Soit $u_1; u_2; \dots; u_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel $(E; +; \cdot)$. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u_1; u_2; \dots; u_n$ est un sous-espace vectoriel de E . On le note

$$\text{Vect}\{u_1; u_2; \dots; u_n\}$$

et on parle du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1; u_2; \dots; u_n)$.

Preuve:

— D'abord le vecteur nul de E peut s'écrire

$$0_E = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n;$$

donc appartient à $\text{Vect}\{u_1; u_2; \dots; u_n\}$.

— Soit ensuite v et w des vecteurs de $\text{Vect}\{u_1; u_2; \dots; u_n\}$. On peut écrire

$$v = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \dots + a_n \cdot u_n \quad \text{et} \quad w = b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \dots + b_n \cdot u_n;$$

donc

$$v + w = (a_1 + b_1) \cdot u_1 + (a_2 + b_2) \cdot u_2 + \dots + (a_n + b_n) \cdot u_n$$

ce qui prouve que $v + w \in \text{Vect}\{u_1; u_2; \dots; u_n\}$.

— Enfin pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda \cdot v = \lambda \cdot (a_1 \cdot u_1 + \dots + a_n \cdot u_n) = (\lambda a_1) \cdot u_1 + \dots + (\lambda a_n) \cdot u_n;$$

donc $\lambda \cdot v$ appartient aussi à $\text{Vect}\{u_1; u_2; \dots; u_n\}$.

□

Remarque 1.4.1 Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}\{u_1; u_2; \dots; u_n\}$ est le plus petit (pour l'inclusion) des sous-espaces vectoriels de E qui contient $u_1; u_2; \dots; u_n$. En effet si F est un tel sous-espace vectoriel de E , comme il est stable par combinaison linéaire, il contient toutes les combinaisons linéaires de $u_1; u_2; \dots; u_n$, donc $\text{Vect}\{u_1; u_2; \dots; u_n\}$.

Définition 1.4.1 Soit $(E; +; \cdot)$ un espace vectoriel et G un sous-espace vectoriel de E . On dit que la famille de vecteurs $(u_1; u_2; \dots; u_n)$ engendre G , ou encore est **une famille génératrice** de G , lorsque

$$G = \text{Vect}\{u_1; u_2; \dots; u_n\}.$$

Exemple 1.4.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n . C'est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, et même un sous-espace vectoriel pour l'addition des fonctions et la multiplication d'une fonction par un réel. En effet la fonction nulle est par convention un polynôme de degré -1 , donc (par abus de langage) inférieur ou égal à n , et une combinaison linéaire de polynômes de degré inférieur ou égal à n est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Mais au fait qu'est-ce qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à n ? C'est une combinaison linéaire des monômes

$$1; \quad X; \quad X^2; \dots; X^n.$$

Autrement dit $\mathbb{K}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ engendré par la famille $(1; X; \dots; X^n)$.

$$\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1; X; \dots; X^n).$$

Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1; 1; 2); (-1; 0; 1); (2; 1/3; -1))$ est-elle génératrice?

Réponse : Pour le savoir, on se donne un vecteur quelconque $(x; y; z)$ de $\mathbb{R}^3$, et on cherche à l'écrire comme combinaison linéaire des trois vecteurs de la famille. Autrement dit on cherche trois réels $\lambda_1; \lambda_2$ et λ_3 tels que

$$\lambda_1 \cdot (1; 1; 2) + \lambda_2 \cdot (-1; 0; 1) + \lambda_3 \cdot (2; 1/3; -1) = (x; y; z).$$

Il s'agit donc de savoir si le système

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = x; \\ \lambda_1 + 1/3\lambda_3 = y; \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = z \end{cases}$$

d'inconnues $\lambda_1; \lambda_2$ et λ_3 admet une solution. Pour cela on utilise l'algorithme du pivot de Gauss qui donne le système équivalent

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = x; \\ \lambda_2 - \lambda_3 = y - x; \\ 0 = z - 3y + x \end{cases}$$

Ce système n'est compatible que si $z - 3y + x = 0$. Donc la famille $((1; 1; 2); (-1; 0; 1); (2; 1/3; -1))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$: si $z - 3y + x \neq 0$, le vecteur $(x; y; z)$ de $\mathbb{R}^3$ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille. Au passage, on récupère une équation cartésienne de

$$F = \text{Vect}((1; 1; 2); (-1; 0; 1); (2; 1/3; -1)) : (x; y; z) \in F \iff z - 3y + x = 0.$$

1.5 Familles libres

Définition 1.5.1 On dit que la famille $(u_1; u_2; \dots; u_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel $(E; +; \cdot)$ est libre lorsque sa seule combinaison linéaire nulle est celle dont tous les coefficients sont nuls c'est-à-dire :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Exemple 1.5.1 Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $(1; X; \dots; X^n)$ est libre. En effet supposons que

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot X + \dots + \lambda_n \cdot X^n = 0.$$

Cela signifie que le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot X + \dots + \lambda_n \cdot X^n$ est la fonction nulle, donc a une infinité de racines. Ce n'est possible que si tous les coefficients sont nuls, i.e. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Exemple 1.5.2 Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1; 1; 2); (-1; 0; 1); (2; a; -1))$ est-elle libre ? Pour le savoir, on suppose qu'il existe trois réels $\lambda_1; \lambda_2$ et λ_3 tels que

$$\lambda_1 \cdot (1; 1; 2) + \lambda_2 \cdot (-1; 0; 1) + \lambda_3 \cdot (2; a; -1) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Cela signifie que $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ est une solution du système

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0; \\ \lambda_1 + a\lambda_3 = 0; \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Il s'agit donc de connaître l'ensemble des solutions du système précédent. Pour cela on utilise une fois de plus l'algorithme du pivot de Gauss et on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + (a-2)\lambda_3 = 0 \\ (1-3a)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ou bien $a \neq \frac{1}{3}$ et le système a pour unique solution $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = (0; 0; 0)$, ou bien $a = \frac{1}{3}$ et le système a une infinité de solutions autres que $(0; 0; 0)$.

Conclusion : la famille $((1; 1; 2); (-1; 0; 1); (2; a; -1))$ est libre si et seulement si $a \neq \frac{1}{3}$.

Remarque 1.5.1 Il est important de noter que pour déterminer si une famille est génératrice, on s'est posé la question de l'existence de solutions pour un système linéaire, et que d'autre part pour savoir si une famille est génératrice, il s'est agi de savoir si un système linéaire admet une unique solution ou bien plusieurs solutions.

1.6 Bases d'un espace vectoriel

1.6.1 Définition, exemples

Définition 1.6.1 On dit que la famille finie $\mathcal{B} = (u_1; u_2; \dots; u_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel $(E; +; \cdot)$ est une base de E lorsque $\mathcal{B}$ est **libre** et **génératrice**.

Exemple 1.6.1 Dans $\mathbb{R}^n$, on note $e_1 = (1; 0; \dots; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0; \dots; 0), \dots, e_n = (0; \dots; 0; 1)$. La famille $(e_1; \dots; e_n)$ est une base, qu'on appelle **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Prouvons que cette famille est génératrice. Soit $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On cherche $\lambda_1; \dots; \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = (x_1; x_2; \dots; x_n)$$

Puisque

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = (\lambda_1; \dots; \lambda_n),$$

il suffit de prendre $\lambda_j = x_j$ pour tout $j \in \{1; \dots; n\}$.

On montre maintenant que $(e_1; \dots; e_n)$ est une famille libre. Supposons que

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = 0_{\mathbb{R}^n} = (0; \dots; 0).$$

Encore une fois puisque $\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = (\lambda_1; \dots; \lambda_n)$, cette égalité entraîne $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exemple 1.6.2 Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on a déjà vu que la famille $(1; X; \dots; X^n)$ est génératrice (c'est la définition de $\mathbb{R}_n[X]$), et libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$, appelée elle aussi base canonique, de $\mathbb{R}_n[X]$ cette fois.

1.6.2 Dimension d'un espace vectoriel

On commence par un résultat dont la preuve est un peu longue, mais qui a beaucoup de conséquences importantes.

Proposition 1.6.1 Soit $(E; +; \cdot)$ un espace vectoriel. On suppose que E admet

- une famille génératrice $(u_1; u_2; \dots; u_n)$,
- une famille libre $(v_1; v_2; \dots; v_p)$.

Alors nécessairement $p \leq n$. De plus, si $p = n$, alors $(u_1; u_2; \dots; u_n)$ et $(v_1; v_2; \dots; v_p)$ sont des bases de E .

Preuve : Admise

Proposition 1.6.2 Si E admet une base, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

Preuve: Soit $(u_1; u_2; \dots; u_n)$ une base de E ; c'est donc une partie génératrice à n éléments, et une partie libre à n éléments. Si $(v_1; v_2; \dots; v_p)$ est une autre base de E , c'est une partie libre donc, d'après la proposition précédente, $p \leq n$, et c'est une partie génératrice, donc, encore avec la proposition précédente, $p \geq n$. $\square$

Définition 1.6.2 Soit $(E; +; \cdot)$ un espace vectoriel non nul. S'il existe une base de E , on appelle dimension de E , et on note $\dim E$, le nombre commun d'éléments de toutes les bases de E . Sinon on dit que E est de dimension infinie, et on note $\dim E = +\infty$.

Remarque 1.6.1 L'espace vectoriel $E = \{0_E\}$ n'admet pas de famille libre puisque toute famille de E contient 0_E . Par convention, on dit pourtant que E a pour dimension 0. Par analogie avec la situation dans $E = \mathbb{R}^3$, les sous-espaces vectoriels de dimension 1 sont appelés "droites", et les sous-espaces vectoriels de dimension 2 sont appelés "plans". Les sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$ d'un espace de dimension n sont appelés hyperplans.

Proposition 1.6.3 (Dimension et inclusion) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit V et W deux sous-espaces vectoriels de E , tels que $V \subset W$. Alors V et W sont de dimension finie et $\dim V \leq \dim W$. De plus $V = W$ si et seulement si $\dim V = \dim W$.

Preuve : Admise $\square$

1.7 Coordonnées d'un vecteur

Théorème 1.7.1 (*Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie*) : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Notons $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ une base (famille libre et génératrice) de E .

Tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, i.e. $\forall \vec{X} \in E, \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\vec{X} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^n x_i \vec{v}_i$$

Les scalaires $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont appelés coordonnées du vecteur $\vec{X}$ dans la base $\mathcal{B}$, on note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Exemple 1.7.1 1. Montrer que la famille $\mathcal{B}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ avec $u_1 = (0, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0, 1)$ et $u_4 = (1, 1, 1, 0)$.

2. Calculons les coordonnées du vecteur $X = (-1, 2, -1, 2)$ par rapport à cette base.

Solution

1. ...
2. D'après la définition précédente, on cherche quatre scalaires x_1, x_2, x_3, x_4 tels

$$X = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4$$

On obtient alors système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \implies x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}, x_3 = \frac{5}{3}, x_4 = -\frac{4}{3}$$

On écrit alors

$$X = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 5/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1.8 Comment extraire une base d'une famille génératrice ?

Exemple 1.8.1 Soit $v_1 = (1; 2; 3; 0)$, $v_2 = (0; 2; 2; 4)$ et $v_3 = (-1; a; 2a - 3; 4a)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$, et $F = \text{Vect}(v_1; v_2; v_3)$. Par définition, la famille $(v_1; v_2; v_3)$ est une famille génératrice de F , et on veut trouver une base de F . Si la famille $(v_1; v_2; v_3)$ est libre, c'est une base. Or l'équation

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0; \text{ équivaut au système } \begin{cases} \lambda_1 & -\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & +2\lambda_2 & +a\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & +(2a-3)\lambda_3 & = & 0 \\ & 4\lambda_2 & +4a\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

Avec l'algorithme du pivot de Gauss, on obtient le système échelonné équivalent :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + (a+2)\lambda_3 = 0 \\ (a-2)\lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Donc si $a \neq 2$, le système admet une unique solution $(0; 0; 0)$. Donc $(v_1; v_2; v_3)$ est une base dans ce cas.

Si $a = 2$, le système admet une infinité de solutions, donc $(v_1; v_2; v_3)$ n'est pas une famille libre. Mais on peut dire plus : λ_3 peut être considéré comme un paramètre et le système peut s'écrire

$$\begin{cases} \lambda_1 = s \\ \lambda_2 = -2s; \lambda_3 = s \end{cases}$$

On obtient en particulier $v_1 - v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, ou encore $v_3 = -v_1 + 2v_2$. Donc $(v_1; v_2)$ est une famille génératrice de F : si $v \in F$, il existe $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. Mais alors

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 (-v_1 + 2v_2) = (\lambda_1 - 3\lambda_3)v_1 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)v_2;$$

ce qui prouve que v s'écrit comme combinaison linéaire de v_1 et v_2 . Enfin $(v_1; v_2)$ est une famille libre de F : dans le cas $s = 0$, la seule solution du système ci-dessus est $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

1.9 Comment trouver une base d'un espace vectoriel donné par un système d'équations ?

On sait que l'ensemble des solutions d'un système homogène de n équations à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. On se pose la question d'en trouver une base, et de déterminer sa dimension.

Exemple 1.9.1 Soit

$$V = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 + 3x_2 = 0; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

V est l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

On l'échelonne avec la méthode du pivot de Gauss. On obtient le système équivalent

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Les inconnues principales sont x_1 et x_2 . On peut les exprimer en fonction de l'inconnue secondaire x_3 en écrivant le système sous forme échelonnée réduite :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Autrement dit,

$$V = \{(-3s; 2s; s); s \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-3; 2; 1)).$$

Exemple 1.9.2 On désigne par F le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x - y + z = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer une base et la dimension de F

Solution

1. La première question est la répétition d'un exemple précédent.
2. Base et dimension de F :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } x - y + z = 0 \\ &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } x = y - z \\ &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } (x, y, z) = (y - z, y, z) \\ &\iff (x, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \end{aligned}$$

On en déduit que la famille $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ est une base de F et que $\dim F = 2$

1.10 Travaux dirigés sur les Espaces vectoriels

Exercice 1.10.1 Montrer que les lois suivantes munissent l'ensemble E indiqué d'une structure de groupe, et préciser s'il est abélien.

1. $E =]-1, 1[$ et la loi $\star$ est définie par $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$.
2. $E = \mathbb{R}^2$ et la loi $\star$ est définie par $(a, b) \star (x, y) = (a+x, be^x + ye^a)$.

Exercice 1.10.2 Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, précisez lesquels sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels :

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \leq 0\}$
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$;
4. $F_4 = \{(x+1, x+y-2, x-y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
5. $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = -y\}$
6. $F_6 = \{(s, 0, 2s+t); (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 1.10.3 1. Soit E l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x + 2y - z = 0$. Justifier que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?
 - $F_1 = \{(\lambda, 3\lambda, 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.
 - La droite F_2 engendrée par le vecteur $\vec{v} = (3, 1, 5)$.
 - $F_3 = \text{Vect}\{(0, 1, 2), (1, -1, -1)\}$
 - $F_4 = \{(\lambda + 1, \lambda - 1, 3\lambda - 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 1.10.4 Soit E défini par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, x + y - iz = 0\}$$

1. Justifier que E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.
2. Ecrire l'ensemble des solutions de l'équation $x + y - iz = 0$ sous forme paramétrique.
3. Donner deux vecteurs qui engendrent E .

Exercice 1.10.5 1. Rappeler la définition d'une famille libre.

2. Déterminer si chacune des familles suivantes de l'espace vectoriel E est une famille libre.
3. $\{(1, 2, -1), (5, 3, 2), (3, -1, 4)\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
4. $\{(1, -1, 2), (3, -4, 2), (-1, 5, m)\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.
5. $\{(i, 1 + i, 2), (i - 1, 2i, 2 + 2i)\}$ dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $E = C^3$
6. $\{(1, 2, -i), (4, 4i, 2), (i, 0, 1)\}$ dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $E = C^3$.

Exercice 1.10.6 1. Rappeler la définition d'une famille génératrice d'un espace vectoriel E .

2. Les familles de vecteurs suivantes sont-elles génératrices dans l'espace vectoriel E indiqué ?
- (a) $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 3)\}$ dans $E = \mathbb{R}^2$.
- (b) $\{(1, i), (i, -1), (1 + i, i - 1)\}$ dans $E = C^2$.
- (c) $\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ dans $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$.

Exercice 1.10.7 1. Montrer que les vecteurs

$$x_1(0, 1, 1), x_2 = (1, 0, 1), x_3 = (1, 1, 0)$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $x = (1, 1, 1)$ dans cette base ?

2. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
3. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Exercice 1.10.8 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$e_1 = (1, 2, 3, 4), e_2 = (1 - 2, 3, -4).$$

Peut-on déterminer x, y pour que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}\{e_1, e_2\}$? Même question pour que $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}\{e_1, e_2\}$?

Exercice 1.10.9 Montrer que la famille

$$(1, 1 - X, (1 - X)^2, (1 - X)^3, (1 - X)^4)$$

est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ puis déterminer les coordonnées du polynôme

$$P = 1 + X - 2X^2 - 5X^3 + X^4$$

Exercice 1.10.10 1. La famille $\{V_1, V_2, V_3\}$ où

$$V_1 = (1, 1, -1), V_2 = (2, 1, 3), V_3 = (0, -1, 5)$$

est-elle libre ? liée ? Quelle relation linéaire lie ces vecteurs ? Quel est l'espace qu'ils engendrent ? Donnez-en une base et la dimension.

2. Construire une base de chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$(a) E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$$

$$(b) E_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_4 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Chapitre 2

Les matrices

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est l'ensemble des scalaires.

2.1 L'espace vectoriel des matrices

Définition 2.1.1 Une matrice A est un tableau rectangulaire présenté habituellement de la manière suivante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les lignes de la matrices sont les n lignes horizontales :

$$(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1p}), (a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2p}), \dots (a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{np})$$

et les colonnes de la matrices A sont les p listes verticales

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

Le scalaire (a_{ij}) , appelé "élément ij " de la matrice A est situé dans le tableau à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne. En d'autres termes, le premier indice i est le numéro de la ligne et le second indice j est celui de la colonne. Dans la pratique la matrice A est notée :

$$A = \left(a_{ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Une matrice ayant n lignes et p colonnes est appelée "matrice $n \times p$ " le couple (n, p) dimension, taille ou format de la matrice. L'ensemble des matrices de taille (n, p) à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Matrice colonne, Matrice ligne :

- Lorsque $p = 1$ on dit que A est une matrice colonne : $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$
- Lorsque $n = 1$ on dit qu'on a une matrice ligne $(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1p})$

Exemple 2.1.1 • Le tableau $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 9 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice 4×3 et on a par exemple

$$a_{13} = -5, \ a_{42} = -6, \ a_{33} = 0 \dots$$

ses colonnes sont :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ce sont des matrices colonnes. Ses lignes sont :

$$(1 \ 0 \ -5), (2 \ -5 \ 10), (1 \ 0 \ 0) (9 \ -6 \ 3)$$

ce sont des matrices lignes.

- La matrice $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice 3×2 dont tous ses coefficients sont nuls. On l'appelle matrice nulle

2.1.1 Opérations sur les matrices

Egalité de deux matrices

On dit que deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales et on écrit $A = B$ lorsque :

- Elles ont la même taille, c'est-à-dire même nombre de lignes et même nombre de colonnes
- leurs éléments sont égaux deux à deux c'est-à-dire $a_{ij} = b_{ij}$

En d'autres termes l'égalité de deux matrices de taille commune (n, p) se traduit par un système de $n \times p$ égalités.

Exemple 2.1.2 Déterminer x, y, z, t tels que :

$$\begin{pmatrix} x+y & 2z+t \\ x-y & z-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Solution:

Par définition de l'égalité de deux matrices, les éléments de mêmes indices doivent être égaux, on obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2z+t=7 \\ z-t=5 \end{cases} \implies x=2, y=1, z=4, t=-1$$

Addition

Définition 2.1.2 Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de **même dimension** (n, p) . On définit la somme de A et B la matrice notée $A + B$, comme étant la matrice obtenue additionnant les éléments de même indice. On a :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

En d'autres termes,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire

Définition 2.1.3 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de format (n, p) et λ un scalaire, on définit la matrice $\lambda \cdot A$ comme étant la matrice de format (n, p) obtenue en multipliant tous les coefficients de la matrice A par λ c'est-à-dire

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})$$

en d'autres termes,

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.1.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$. On alors :

- $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
- $3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \end{pmatrix}$
- $2A - 3B = \begin{pmatrix} -10 & -22 & -18 \\ -3 & 17 & 31 \end{pmatrix}$

Propriétés élémentaires de l'addition et de la multiplication par un scalaire

On note $\tilde{0}$ la matrice nulle, c'est-à-dire la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Théorème 2.1.1 Soient trois matrices A, B et C de même taille, et deux scalaires α et β . Alors :

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + \tilde{0} = A$
3. $A + B = B + A$
4. $A + (-A) = \tilde{0}$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
8. $1 \cdot A = A$

Remarque 2.1.1 Ces propriétés montrent que l'ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, muni de la somme des matrices et du produit d'une matrice par un scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. En fait c'est un espace vectoriel de dimension finie $n \times p$. Sa base canonique est la famille des $n \times p$ matrice E_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ où E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la i -ème ligne et la j -ème colonne qui vaut 1.

Produit des matrices

Définition 2.1.4 Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{kj})$ deux matrices telles que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B , autrement dit, $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pm}(\mathbb{K})$. Le produit $A.B$ de la matrice A par la matrice B est la matrice de format (n, m) dont l'élément ij est obtenu en multipliant la i -ème ligne de la matrice A par la j -ème colonne de la matrice B . En d'autres termes, si on pose

$$A.B = (c_{ij})$$

alors, on a :

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ip}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

Nous insistons sur le fait que le produit AB de la matrice A par la matrice B n'est possible que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de ligne de la matrice B .

Exemple 2.1.4 (a) Déterminons la matrice AB si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Puisque A est une matrice 2×2 et B une matrice 2×3 le produit AB est défini et est une matrice 2×3 . On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 & 14 \\ -1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

Ce dernier exemple montre que le produit matriciel n'est pas commutatif, autrement dit, $AB \neq BA$. Toutefois ce produit vérifie les propriétés suivantes :

Théorème 2.1.2 Soit λ un scalaire et A, B, C trois matrices vérifiant les conditions requises pour que les sommes et les produits ci-dessous existent, alors on a :

- (a) $(AB)C = A(BC)$
- (b) $A(B + C) = AB + AC$
- (c) $(B + C)A = BA + CA$
- (d) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- (e) $\tilde{0}A = A\tilde{0} = \tilde{0}$

Transposée d'une matrice

Définition 2.1.5 Soit A une matrice de format (n, p) . On appelle transposée de la matrice A la matrice notée tA de format (p, n) obtenue en écrivant en ligne et dans l'ordre les colonnes de A , en d'autres termes si $A = (a_{ij})$ alors ${}^tA = (a_{ji})$.

Exemple 2.1.5

$${}^t \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t (1 \quad -3 \quad -10) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Propriété de la transposition

L'opération de transposition d'une matrice possède les propriétés suivantes

1. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
2. ${}^t({}^tA) = A$
3. ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
4. ${}^t(AB) = {}^tA {}^tB$

2.2 Matrices Carrées

Comme son nom l'indique, une matrice carrée A est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes. Si ce nombre est égal à n , alors A est une matrice de format (n, n) ; On dit que A est une matrice carrée d'ordre n . L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On se souvient que la somme et le produit de deux matrices quelconques n'est pas toujours défini; ce n'est plus vrai pour les matrices carrées à condition bien sûr qu'elles soient de même taille. Plus précisément, les opérations d'addition, de multiplication par un scalaire, de produit matriciel et de transposition peuvent être appliquées sur des matrices $n \times n$, le résultat étant encore une matrice $n \times n$.

2.2.1 Diagonale et Trace d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n

- Définition 2.2.1**
- Les éléments de A dont les deux indices sont égaux, soit a_{ii} sont appelés éléments diagonaux de A . L'ensemble formé de tous ces éléments est appelé diagonale principale ou diagonale de A .
 - La trace de la matrice A est définie par la somme de ses éléments diagonaux, elle est notée $tr(A)$:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Quelques propriétés de la trace

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices carrées d'ordre n , et λ un scalaire, alors :

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$
3. $tr({}^t A) = tr(A)$
4. $tr(AB) = tr(BA)$

2.2.2 Matrices carrées particulières

Matrice identité

Définition 2.2.2 La matrice identité ou la matrice identité d'ordre n , notée I_n ou I est la matrice dont tous les éléments diagonaux sont égaux 1 et dont tous les autres éléments sont nuls. On a :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Proposition 2.2.1 Pour toute matrice carrée d'ordre n , on a :

$$AI_n = I_n A = A$$

Matrice diagonale

Définition 2.2.3 Une matrice A carrée d'ordre n est dite diagonale lorsque tous ses éléments non diagonaux sont égaux 0. Une matrice diagonale a la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrices triangulaires

Définition 2.2.4 Une matrice carrée d'ordre n est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) lorsque tous ses éléments situés en dessous (resp. au dessus) de la diagonale principale sont nuls

Les matrices triangulaires supérieures sont de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

tandis que celles qui sont triangulaires inférieures sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2.2.3 Matrices inversibles

Définition 2.2.5 Une matrice A carrée d'ordre n est dite inversible ou régulière s'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B lorsqu'elle existe elle est unique et est appelée inverse de la matrice A , elle est notée A^{-1} .

Remarque 2.2.1 Si B est l'inverse de A alors A est l'inverse de B .

Exemple 2.2.1 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

donc les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.

Remarque 2.2.2 Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n qui vérifient $AB = I_n$ alors on a nécessairement $BA = I_n$. Il suffit alors d'effectuer le produit dans un seul sens pour s'assurer si oui ou non les deux matrices sont inverses l'une de l'autre.

Au prochain chapitre nous décrirons une méthode de calcul de l'inverse d'une matrice lorsqu'elle existe.

Exercice 2.2.1 Soit $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2 et M^3 . En déduire l'expression de la matrice $M^3 + 2M^2 - M - 2I_3$
2. Montrer que M est inversible et calculer son inverse

Solution:

1. On a :

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 14 & 14 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que :

$$M^3 + 2M^2 - M - 2I_3 = \tilde{0} \text{ matrice nulle}$$

2. Montrons que M est inversible et calculons son inverse. On a :

$$\begin{aligned}
 M^3 + 2M^2 - M - 2I_3 = \tilde{0} &\iff M^3 + 2M^2 - M = 2I_3 \\
 &\iff M(M^2 + 2M - I_3) = 2I_3 \\
 &\iff \frac{1}{2}M(M^2 + 2M - I_3) = I_3 \\
 &\iff M\left(\frac{1}{2}(M^2 + 2M - I_3)\right) = I_3 \\
 &\iff MN = I_3
 \end{aligned}$$

avec $N = \frac{1}{2}(M^2 + 2M - I_3)$. Donc M est inversible et

$$M^{-1} = N = \frac{1}{2}(M^2 + 2M - I_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -2 & \frac{9}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & -\frac{13}{2} & -6 \end{pmatrix}$$

□

2.3 Rang d'une matrice

Définition 2.3.1 (Matrice échelonnée) Une matrice rectangulaire B est dite échelonnée en lignes si :

- chaque ligne non nulle de B commence avec strictement plus de 0 que la ligne précédente, et
- les lignes nulles (ne contenant que des 0) de B viennent en bas après les lignes non nulles.

Proposition 2.3.1 Toute matrice A peut se réduire à une matrice échelonnée en lignes B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. B est alors appelée la forme échelonnée en lignes de A .

Exemple 2.3.1 Déterminons une matrice B échelonnée en lignes équivalente à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix}$$

Solution :....

L'un des concepts fondamentaux en algèbre linéaire est le rang d'une matrice. Il admet plusieurs définitions équivalentes. En voici l'une d'entre elles.

Définition 2.3.2 Soit A une matrice n lignes et p colonnes i.e. $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Notons $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, C_2, \dots, C_p$ ses différentes colonnes. Le rang de A est par définition **la dimension** du sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ engendré par les vecteurs $L_1, L_2, \dots, L_n$; c'est aussi **la dimension** du sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les vecteurs $C_1, C_2, \dots, C_p$. Il est noté $rg(A)$.

Remarque 2.3.1 Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ alors :

$$rg(A) \leq \max\{n, p\}.$$

Théorème 2.3.1 *Le rang d'une matrice A est le nombre de lignes non nulles dans sa forme échelonnée en lignes.*

Exemple 2.3.2 *Déterminer le rang de chacune des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution :

2.4 Travaux dirigés sur le calcul matriciel

Exercice 2.4.1 *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 22 & 17 & 0,1 & 8 \end{pmatrix}$.*

1. Donner le format de A
2. Donner la valeur de chacun des éléments a_{14} , a_{23} , a_{33} et a_{32}
3. Ecrire la matrice transposée tA de A et donner son format

Exercice 2.4.2 *Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer $A + B$, $A - B$, $3A - 4B$.*

Exercice 2.4.3 *Soit $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$.*

1. Trouver x et y pour que $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$
2. Trouver x et y pour que $2A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$

Exercice 2.4.4 *On considère les matrices A , B et C définies par $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B =$*

$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -14 & 7 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice C est une combinaison linéaire des matrices A et B .

Exercice 2.4.5 *Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible. Lorsque c'est impossible, dire pourquoi.*

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.4.6 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lorsqu'elles ont un sens, calculer les expressions $A + B, AB, BA, {}^tBA, B + AB$ et $A + AB$.

Exercice 2.4.7 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Trouver les expressions de A^n, B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.4.8 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2
2. Montrer que $A^2 = A + 2I$.
3. En déduire que est inversible puis calculer A^{-1} .

Exercice 2.4.9 Répondre par Vrai ou faux. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n .

1. Si A est inversible et $A^{-1} = B$ alors B est inversible et $B^{-1} = A$.
2. Si A et B sont inversibles et $C = AB$ alors C est inversible et $C^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
3. Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.
4. $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$
5. $AB + BA = 0$ ssi $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.
6. Si $A + B = AB$, alors $I - A$ est inversible

Exercice 2.4.10 On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$
2. Calculer J^2 .
3. Calculer A^3, A^3, A^4 comme combinaison linéaire de I et J .

Chapitre 3

Applications linéaires

3.1 Définitions et Exemples

Définition 3.1.1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Une application f de E dans F est dite **linéaire** si elle vérifie

$$(i) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$(ii) \quad \forall \vec{u} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$$

Remarque 3.1.1 Notons que les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes à l'unique propriété :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

Remarque 3.1.2 Si f est une application linéaire de E vers F alors

$$f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$$

En effet, on a $\vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{0}_E$ et comme f est linéaire, on a alors

$$f(\vec{0}_E) = f(\vec{0}_E + \vec{0}_E) = f(\vec{0}_E) + f(\vec{0}_E) \implies f(\vec{0}_E) = f(\vec{0}_E) - f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$$

Cette Propriété donne une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'une application soit linéaire. Si on remarque que $f(\vec{0}_E) \neq \vec{0}_F$ alors on conclut rapidement que f n'est pas linéaire. Par contre, $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ ne suffit pas pour conclure que f est linéaire.

Notation : L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E; F)$. C'est un espace vectoriel pour les lois usuelles d'addition des applications et de multiplication d'une application par un scalaire.

Exemple 3.1.1 Montrons que l'application f telle que :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x - y, x + 2y, 3x - y) \end{aligned}$$

est linéaire

Solution:

Montrons que cette application vérifie les propriétés (i) et (ii).

(i) soit $\vec{u} = (x, y), \vec{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrons que $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$; On a :

$$\begin{aligned}
 f(\vec{u} + \vec{v}) &= f((x, y) + (a, b)) \\
 &= f(x + a, y + b) \\
 &= ((x + a) - (y + b), (x + a) + 2(y + b), 3(x + a) - (y + b)) \\
 &= ((x - y) + (y - b), (x + 2y) + (a + 2b), (3x - y) + (3y - b)) \\
 &= (x - y, x + 2y, 3x - y) + (a - b, a + 2b, 3a - b) \\
 &= f(\vec{u}) + f(\vec{v})
 \end{aligned}$$

(ii) soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$

$$\begin{aligned}
 f(\lambda\vec{u}) &= f(\lambda(x, y)) \\
 &= f(\lambda x, \lambda y) \\
 &= ((\lambda x) - (\lambda y), (\lambda x) + 2(\lambda y), 3(\lambda x) - (\lambda y)) \\
 &= \lambda(x - y, x + 2y, 3x - y) \\
 &= \lambda f(\vec{u})
 \end{aligned}$$

Exercice 3.1.1 Montrer que l'application

$$\begin{aligned}
 \phi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_{n+1}[X] \\
 P &\longmapsto (1 - X)P + X^2 P'
 \end{aligned}$$

est linéaire. (Ici P' est le polynôme dérivé du polynôme P .)

□

Définition 3.1.2 Etant donné un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Une application linéaire de E dans E est appelé **endomorphisme** de E .

Notation : L'Ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}(E)$. C'est un espace vectoriel pour les lois usuelles d'addition des applications et de multiplication d'une application par un scalaire.

Définition 3.1.3 On considère deux espaces vectoriels E et F sur le corps $\mathbb{K}$.

- On appelle **isomorphisme** de E sur F toute application linéaire f , bijective (injective et surjective) de E sur F .
- Un **automorphisme** de E sur E est un endomorphisme bijectif de E

Notations :

1. L'ensemble des isomorphismes de E sur F est noté $Isom(E, F)$
2. L'ensemble des automorphismes de E est noté $Aut(E)$ ou $Gl(E)$ il est aussi appelé le groupe linéaire de E .

Théorème 3.1.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E dans F alors son application réciproque f^{-1} est une application linéaire de F vers E . En réalité, $f^{-1} \in Iso(F, E)$

Preuve : Soit $f \in \text{Isom}(E, F)$. f est linéaire et bijective. Montrons que sa bijection réciproque f^{-1} est linéaire. Soit alors $u, v \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ Montrons $f^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v)$. Puisque f est bijective, $\exists!(x, y) \in E \times E$ tel que

$$\begin{cases} u = f(x) \\ v = f(y) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha u = f(\alpha x) \\ \beta v = f(\beta y) \end{cases} \implies \alpha u + \beta v = f(\alpha x) + f(\beta y)$$

Comme f est bijective, la dernière égalité entraîne (en composant à gauche et à droite par f^{-1}) que :

$$f^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha x + \beta y$$

D'autre part,

$$\begin{cases} u = f(x) \\ v = f(y) \end{cases} \implies \begin{cases} x = f^{-1}(u) \\ y = f^{-1}(v) \end{cases}$$

On obtient alors

$$f^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v)$$

Donc f^{-1} est linéaire. □

Définition 3.1.4 Deux espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de E sur F .

3.2 Noyau et Image d'une application linéaire

Définition 3.2.1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F .

- On appelle noyau de f et on note $\ker f$ ou $N(f)$ l'ensemble des antécédent du vecteur nul de F par f , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image par f le vecteur nul de F . On a :

$$\ker f = \{\vec{u} \in E \text{ tq } f(\vec{u}) = \vec{0}_F\} = f^{-1}(\{\vec{0}_F\})$$

- On appelle image de l'application linéaire f et on note $\text{Im}(f)$ ou $I(f)$, l'ensemble de toutes les images par f des vecteurs de E . On a :

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(\vec{u}), \vec{u} \in E\} = \{\vec{v} \in F \text{ tq } \exists \vec{u} \in E, \vec{v} = f(\vec{u})\}$$

Remarque 3.2.1 $\ker f$ est un sous ensemble de E tandis que $\text{Im}(f)$ est un sous ensemble de F .

$$\ker f \subset E, \quad \text{Im}(f) \subset F$$

Mieux, on a :

Théorème 3.2.1 Soit f une application linéaire de E vers F .

- Le noyau de f est un sous espace vectoriel de E
- L'image de f est un sous espace vectoriel de F .

Preuve :

- D'après la remarque 3.1.2 page 25, on a :

$$f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \implies \vec{0}_E \in \ker f \text{ et } \vec{0}_F \in \text{Im}(f) \implies \ker f \neq \emptyset \text{ et } \text{Im}(f) \neq \emptyset$$

— Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \ker f$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ montrons que $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 \in \ker f$. On a

$$\begin{aligned} f(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) &= f(\alpha\vec{u}_1) + f(\beta\vec{u}_2) \\ &= \alpha f(\vec{u}_1) + \beta f(\vec{u}_2) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \alpha \cdot \vec{0}_F + \beta \cdot \vec{0}_F \quad \text{car } \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \ker f \text{ (leurs images par } f \text{ sont nulles)} \end{aligned}$$

Donc $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 \in \ker f \implies \ker f$ est sous espace vectoriel de E .

— Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \text{Im}(f)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ montrons que $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in \text{Im}(f)$. Il s'agit alors de trouver $\vec{u} \in E$ tel que $f(\vec{u}) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$.
Puisque $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \text{Im}(f)$, il existe deux vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in E$ tels que $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1$ et $f(\vec{u}_2) = \vec{v}_2$. On alors

$$\begin{aligned} \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 &= \alpha f(\vec{u}_1) + \beta f(\vec{u}_2) \\ &= f(\alpha\vec{u}_1) + f(\beta\vec{u}_2) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= f(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \end{aligned}$$

Donc, il suffit alors de prendre $\vec{u} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$ et on a : $f(\vec{u}) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$. Ceci permet de conclure que $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in \text{Im}(f) \implies \text{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de F $\square$

Proposition 3.2.1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F . Si E est engendré par les vecteurs $(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_p)$ alors $\text{Im}(f)$ est le sous espace vectoriel de F engendré par les vecteurs $(f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_p))$

Preuve :

Faire cette preuve à titre d'exercice. $\square$

Exemple 3.2.1 On considère l'application g définie par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto (x - y + z + t, 2x - 2y + 3z + 4t, 3x - 3y + 4z + 5t) \end{aligned}$$

1. Montrer que g est une application linéaire
2. Déterminer une base et la dimension de $\ker g$
3. Déterminer une base et la dimension de $\text{Im}(g)$

Solution:

1. Montrer que g est linéaire est une répétition d'un des exemples précédents. Recopier cette preuve dans le cadre de cet exemple.
2. Base et dimension de $\ker g$: On rappelle que

$$\ker g = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } g(x, y, z, t) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
(x, y, z, t) \in \ker g &\iff g(x, y, z, t) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff (x - y + z + t, 2x - 2y + 3z + 4t, 3x - 3y + 4z + 5t) = (0, 0, 0) \\
&\iff \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + 4t = 0 \\ 3x - 3y + 4z + 5t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = y + t \\ z = -2t \end{cases} \\
&\iff (x, y, z, t) = (y + t, y, -2t, t) = y(1, 1, 0, 0) + t(1, 0, -2, 1)
\end{aligned}$$

On conclut alors la famille $(e_1 = (1, 1, 0, 0), e_2 = (1, 0, -2, 1))$ est une base de $\ker g$ et que $\dim \ker g = 2$

3. Déterminons une base et la dimension de $Im(g)$. On rappelle tout d'abord que :

$$Im(g) = \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, g(x, y, z, t) = (x', y', z')\}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
(x', y', z') \in Im(g) &\iff \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; tq \ g(x, y, z, t) = (x', y', z') \\
&\iff (x - y + z + t, 2x - 2y + 3z + 4t, 3x - 3y + 4z + 5t) = (x', y', z') \\
&\iff \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; tq \ \begin{cases} x - y + z + t = x' \\ 2x - 2y + 3z + 4t = y' \\ 3x - 3y + 4z + 5t = z' \end{cases} \\
&\implies x' + y' - z' = 0 \\
&\implies z' = x' + y' \\
&\implies (x', y', z') = (x', y', x' + y') = x'(1, 0, 1) + y'(0, 1, 1)
\end{aligned}$$

On conclut alors la famille $(e'_1 = (1, 0, 1), e'_2 = (0, 1, 1))$ est une base de $Im(g)$ et que $\dim Im(g) = 2$

Remarque 3.2.2 Pour Déterminer la dimension et une base de $Im(g)$ on peut aussi utiliser le Théorème précédent. Puisqu'on sait que la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ engendre $\mathbb{R}^4$ on a :

$$\begin{aligned}
Im(g) &= \text{vect}\{g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4)\} \\
&= \text{vect}\{(1, 2, 3), (-1, -2, -3), (1, 3, 4), (1, 4, 5)\}
\end{aligned}$$

En suite on ... (la suite à l'amphi)

Rappels :

Soit $h : A \longrightarrow B$ une application.

- h est dite **injective** si et seulement si l'image de deux éléments distincts de A sont deux éléments distincts de B i.e.

$$\begin{aligned}
\mathbf{h \text{ injective}} &\iff \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \\
&\iff \forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2
\end{aligned}$$

- h est dite **surjective** si et seulement si tout élément de B possède au moins un antécédent par h i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{h \text{ surjective}} &\iff \forall y \in B, \exists x \in A \text{ tq } \implies y = f(x) \\ &\iff h(A) = B \end{aligned}$$

- h est dite **bijective** si et seulement si h est injective et surjective ce qui signifie que tout élément de B possède un unique antécédent par h i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{h \text{ bijective}} &\iff \forall y \in B, \exists! x \in A \text{ tq } \implies y = f(x) \\ &\iff h \text{ injective et } h(A) = B \end{aligned}$$

Théorème 3.2.2 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective
2. $\ker f = \{\vec{0}_E\}$
3. L'image de toute famille libre de E par f est une famille libre de F

Preuve :

Théorème 3.2.3 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est surjective
2. $\text{Im}(f) = F$
3. L'image de toute famille génératrice de E par f est une famille génératrice de F

Preuve :

3.3 Application linéaire en dimension finie

Définition 3.3.1 (*Rang application*) Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F . On suppose que E ou F est de dimension finie. On appelle rang de l'application linéaire f la dimension de son image. On note $\text{rang}(f)$ et on a :

$$\text{rang}(f) = \dim \text{Im}(f)$$

Remarque 3.3.1 Si l'espace vectoriel E est engendré par la famille de vecteurs $(\vec{v}_1; \vec{v}_2, \dots; \vec{v}_p)$, alors d'après la définition précédente, on :

$$\begin{aligned} \text{rang}(f) &= \dim \text{Im}(f) \\ &= \dim \text{vect}\{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_p)\} \end{aligned}$$

Théorème 3.3.1 (*Théorème du rang*) Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F . Si l'espace vectoriel E est de dimension finie, alors les sous espaces vectoriels $\ker f$ et $\text{Im}(f)$ sont de dimension finie et on a :

$$\dim E = \dim \text{Im}(f) + \dim \ker f \quad (3.3)$$

Théorème 3.3.2 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F . Alors on a :

1. f est injective $\iff$ l'image d'une base quelconque de E est une famille libre de F
2. f est surjective $\iff$ l'image d'une base quelconque de E est une famille génératrice de F
3. f est bijective $\iff$ l'image d'une base quelconque de E est une base de F . Dans ce cas E et F ont la même dimension

Le théorème suivant est une conséquence du précédent

Théorème 3.3.3 Soient E un espace vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie et f un endomorphisme de E (une application linéaire de E dans E . Alors on a les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un automorphisme
2. $\ker f = \{\vec{0}_E\}$
3. $\text{Im}(f) = E$
4. L'image par f d'une base de E est une base de F
5. $\text{rang}(f) = \dim E$

Preuve: Admise □

3.4 Matrice d'une application linéaire

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Soit encore f une application linéaire de E vers F .

Définition 3.4.1 On appelle matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice à n lignes et p colonnes notée $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ dont la i -ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$:

Formulaire :

Si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on a

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} u_j$$

alors on a :

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{array}{ccccccc} & f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) & & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{array} \right) & \leftarrow & \begin{array}{l} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \end{array}$$

Remarque 3.4.1 Lorsque f est une endomorphisme ($E = F$) et si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ alors on écrit $M(f, \mathcal{B})$ au lieu de $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et on dit que c'est la matrice de l'endomorphisme f par rapport à la base $\mathcal{B}$

Exemple 3.4.1 On considère l'application linéaire f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x - y, x + 2y, 3x - y) \end{aligned}$$

Ecrire la matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Solution:

Notons $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (0, 1, 0), e'_3 = (0, 0, 1)\}$ celle de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases} f(e_1) = (1, 1, 3) = e'_1 + e'_2 + 3e'_3 \\ f(e_2) = (-1, 2, -1) = -e'_1 + 2e'_2 - e'_3 \end{cases} \implies M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

□

Exemple 3.4.2 Ecrire la matrice de l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\longmapsto (1 - X)P' + X^2P'' \end{aligned}$$

par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. N.B Ici P' est la dérivée première de P et P'' la dérivée seconde de P

Solution:

La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est la famille $\{1, X, X^2, X^3\}$. On alors

$$\begin{cases} \phi(1) = 0 \\ \phi(X) = 1 - X \\ \phi(X^2) = 2X \\ \phi(X^3) = 3X^2 + 3X^3 \end{cases} \implies M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

Remarque 3.4.2

- Si $\dim E = p$ et $\dim F = n$ alors $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est une matrice rectangulaire de format $n \times p$ i.e.

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

- Si X est le vecteur colonne représentant les coordonnées du vecteur $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$, si Y est le vecteur colonne représentant les coordonnées du vecteur $\vec{y} = f(\vec{x})$ dans la base $\mathcal{B}'$, et si A est la matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors $Y = AX$ i.e.

$$\vec{y} = f(\vec{x}) \iff Y = AX$$

Exercice 3.4.1 On désigne par ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\phi(x, y, z)$ en fonction de x, y et z .
2. Déterminer le noyau et l'image de ϕ . On précisera dans chaque cas une base et la dimension
3. On pose $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$. Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de l'endomorphisme ϕ par rapport à cette nouvelle base

Solution:

1. D'après le second item de la remarque précédente, on a :

$$\begin{aligned} (x', y', z') = \phi(x, y, z) &\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + y + 2z = x' \\ -2x + y - z = y' \\ x + 3y + 4z = z' \end{cases} \end{aligned}$$

On écrit alors :

$$\phi(x, y, z) = (x + y + 2z, -2x + y - z, x + 3y + 4z)$$

2. **Noyau de ϕ :** On a

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \ker(\phi) &\iff \phi(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = (-z, -z, z) \\ &\iff (x, y, z) = z(-1, -1, 1) \end{aligned}$$

On conclut alors que

$$\ker(\phi) = \text{vect}\{e_1 = (-1, -1, 1)\} \quad \text{et} \quad \dim \ker(\phi) = 1$$

Image de ϕ : Puisque la base canonique engendre $\mathbb{R}^3$, les images de cette famille

engengrent $Im(\phi)$. On a :

$$\begin{aligned}
 Im(\phi) &= vect\{\phi(1, 0, 0), \phi(0, 1, 0), \phi(0, 0, 1)\} \\
 &= vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \right\} \\
 &= vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \right\} \\
 &= vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \right\}
 \end{aligned}$$

On conclut alors que :

$$Im(\phi) = vect\{e_2 = (1, -2, 1), e_3 = (0, 3, 2)\} \implies \dim Im(\phi) = 3$$

Deuxième méthode : Voir à l'amphi

3. Puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, pour montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer que c'est une famille linéairement indépendante. (Ce que chacun peut faire à ce stade du cours)

Matrice de ϕ par rapport à cette base : Par définition, pour obtenir cette matrice il faut calculer $\phi(u_1)$, $\phi(u_2)$ et $\phi(u_3)$ est fonction de u_1, u_2 et u_3 . On a :

$$\begin{aligned}
 \phi(u_1) = (3, 0, 7) &= au_1 + bu_2 + cu_3 \\
 &= (b + c, a + c, a + b) \\
 \implies &\begin{cases} b + c = 3 \\ a + c = 0 \\ a + b = 7 \end{cases} \\
 \implies &\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\phi(u_1) = 2u_1 + 5u_2 - 2u_3$$

De même,

$$\begin{aligned}
 \phi(u_2) = (3, -3, 5) &= au_1 + bu_2 + cu_3 \\
 &= (b + c, a + c, a + b) \\
 &= \begin{cases} b + c = 3 \\ a + c = -3 \\ a + b = 5 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 11/2 \\ c = -5/2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\phi(u_2) = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{11}{2}u_2 - \frac{5}{2}u_3$$

De même

$$\begin{aligned}
 \phi(u_3) = (2, -1, 4) &= au_1 + bu_2 + cu_3 \\
 &= (b + c, a + c, a + b) \\
 &= \begin{cases} b + c = 2 \\ a + c = -1 \\ a + b = 4 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 7/2 \\ c = -3/2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\phi(u_3) = \frac{1}{2}u_1 + \frac{7}{2}u_2 - \frac{3}{2}u_3$$

On obtient alors :

$$M(\phi, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 10 & 11 & 7 \\ -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Remarque : Au paragraphe suivant nous décrirons une méthode plus directe de calcul de cette matrice.

Théorème 3.4.1 • Si f est une application linéaire de E dans F et si A est la matrice de f par rapport à des bases quelconques de E et F , alors

$$\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(f) = \text{rg}(A)$$

- Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}$ une base de E et f un endomorphisme de E , de matrice A par rapport à la base $\mathcal{B}$ alors on a :

$$f \text{ est un automorphisme de } E \iff \text{rg}(A) = n \iff \det(A) \neq 0$$

3.5 Fiche de TD sur les applications linéaires

Exercice 3.5.1 Lesquelles des applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (x + y, x) & (x, y, z) &\longmapsto g(x, y, z) = (x^2 + y^2, z, y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} & \ell : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (x, y, z) &\longmapsto h(x, y, z) = 2x + 3y - z & (x, y) &\longmapsto \ell(x, y) = xy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 P &\longmapsto m(P) = (P(-1), P(0), P(1))
 \end{aligned}$$

Exercice 3.5.2 On considère l'application

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)
 \end{aligned}$$

1. Vérifier que f est linéaire
2. Déterminer le noyau de cette application. Donner sa dimension ainsi qu'une base.
3. Déterminer l'image de cette application. Donner sa dimension ainsi qu'une base.
4. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.5.3 Soit h l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base : $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_3 + e_1$, $e'_3 = e_1 + e_2$. Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?
2. On choisit pour $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, $f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$. En conservant la base (e'_1, e'_2, e'_3) dans $\mathbb{R}^3$, quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

Exercice 3.5.4 Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. on note T la transformation linéaire définie par : $T(e_1) = T(e_3) = e_3$, $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application linéaire. Ecrire la matrice A de T dans la base (e_1, e_2, e_3) .
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction f_1, f_2, f_3 . Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $T(f_1)$, $T(f_2)$, $T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3 . Ecrire la matrice B de T dans la base (f_1, f_2, f_3) et trouver la nature de l'application T .
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1} . Quelle relation lie les quatre matrices A, B, P, P^{-1} ?

Exercice 3.5.5 1. Déterminer une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ donc l'image est engendrée par les vecteurs $u = (1, 2, 0, -4)$ et $v = (2, 0, -1, -3)$.

2. Une telle application peut-elle être injective ? Surjective ?

Exercice 3.5.6 On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (2x, -4x + 5y - 2z, -5x + 4y - z)$$

1. Montrer que f est linéaire. Déterminer son noyau son image et son rang.
2. Ecrire la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. On pose pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = \lambda(x, y, z)\}$.
 - (a) Montrer que E_λ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
 - (b) Pour quelle valeurs de λ , le sous espace vectoriel E_λ n'est pas réduit au singleton vecteur nul de $\mathbb{R}^3$?
 - (c) Pour chacune des valeurs de λ trouvées à la question précédente, déterminer une base et la dimension de E_λ .
 - (d) Montrer que la famille $\{(0, 1, 2), (1, 2, 1), (0, 1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis écrire la matrice de f relativement à cette base.

- Exercice 3.5.7** 1. Déterminer une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ donc l'image est engendrée par les vecteurs $u = (1, 2, 0, -4)$ et $v = (2, 0, -1, -3)$.
2. Une telle application peut-elle être injective ? Surjective ?

Exercice 3.5.8 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (2x, -4x + 5y - 2z, -5x + 4y - z) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire. Déterminer son noyau son image et son rang.
2. Ecrire la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. On pose pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = \lambda(x, y, z)\}$.
- (a) Montrer que E_λ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Pour quelle valeurs de λ , le sous espace vectoriel E_λ n'est pas réduit au singleton vecteur nul de $\mathbb{R}^3$?
- (c) Pour chacune des valeurs de λ trouvées à la question précédente, déterminer une base et la dimension de E_λ .
- (d) Montrer que la famille $\{(0, 1, 2), (1, 2, 1), (0, 1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis écrire la matrice de f relativement à cette base.

Chapitre 4

Les Déterminants des Matrices carrées

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

4.1 Définition récursive du déterminant

Notation

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients

dans $\mathbb{K}$. On notera $\widetilde{M}_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de la matrice A .

Définition 4.1.1 (*Déterminant d'une matrice carrée.*) On définit de manière récursive le

déterminant de matrice carrée A noté $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{vmatrix}$ de la façon sui-

vante :

- Le déterminant de la matrice carrée 1×1 , $A = (a_{11})$, est le scalaire a_{11} lui-même, soit

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

- Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 est défini comme suit :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n est par définition égale à (pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$) :

$$\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1} \det(\widetilde{A}_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2} \det(\widetilde{A}_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n}a_{in} \det(\widetilde{A}_{in}) \quad (4.1)$$

Exemple 4.1.1 Pour $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ on a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= \dots \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \\ = \dots$$

Remarque 4.1.1 — La formule 4.1 est indépendante de i c'est-à-dire de la ligne choisie.

On l'appelle développement de Laplace du déterminant de A selon la i -ème ligne. On choisit alors n'importe quelle ligne pour effectuer ce développement.

— De même cette formule ne change si on choisit plutôt la j -ème colonne ; on dira alors qu'on a développement de Laplace du déterminant de A selon la j -ème colonne.

— Dans la pratique, on choisit la ligne ou la colonne qui contient le maximum de 0.

Exemple 4.1.2 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Solution :

On a :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 10 = 3$$

On développe le second déterminant par rapport à la première ligne et on trouve

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \\ = \dots$$

On développe le troisième déterminant par rapport à la dernière colonne et on trouve :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -6 \end{vmatrix} \\ = \dots$$

4.2 Propriétés des déterminants

Nous présentons ici quelques propriétés des déterminants.

Théorème 4.2.1 *Le déterminant d'une matrice A et celui de sa transposée tA sont égaux :*

$$\det {}^tA = \det A$$

Grâce à ce théorème, tout théorème sur le déterminant, relatif aux lignes d'une matrice A , a son équivalent pour les colonnes de A .

Théorème 4.2.2 *Soit A une matrice carrée.*

- *Si A a une ligne (ou une colonne) nulle, alors $\det A = 0$*
- *Si A a deux lignes (ou colonnes) identiques, alors $\det A = 0$*
- *Si une ligne (resp. colonne) de A est une combinaison linéaire des autres alors $\det A = 0$*
- *Si A est triangulaire, autrement dit si tous les éléments au-dessus ou au-dessous de la diagonale sont nuls, alors $\det A$ est égal au produit des éléments diagonaux. En particulier, $\det I_n = 1$, ou I est la matrice unité.*

Le théorème suivant, montre comment se transforme le déterminant par une opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes.

Théorème 4.2.3 *On considère une matrice B obtenue à partir d'une matrice A par une opération élémentaire sur les lignes (respectivement sur les colonnes)*

- *Si l'on échange deux lignes (resp colonnes) de A , alors $\det B = -\det A$;*
- *Si l'on multiplie une ligne (resp colonnes) de A par un scalaire k , alors $\det B = k \det A$;*
- *Si l'on ajoute un multiple d'une ligne (resp.colonne) de A à une autre ligne (resp colonne) de A , alors $\det B = \det A$*

Exemple 4.2.1 *Calculer le déterminant*

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Solution:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} c1 \leftarrow c_1 - 2c_3 \\ c_2 \leftarrow c_2 + 2c_3 \\ c_3 \leftarrow c_3 \\ c4 \leftarrow c_4 + c_3 \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -19 \\ -1 & 2 & 23 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} 1 & -19 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ & = -(23 - 19) = -4 \end{aligned}$$

Théorème 4.2.4 (*Propriétés fondamentales des déterminants*) Le déterminant du produit AB de deux A et B est égal produit des déterminants :

$$\det(AB) = \det A \times \det B.$$

En d'autres termes, le déterminant est une fonction multiplicative.

4.2.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n un corps $\mathbb{K}$, soit $\mathcal{B}$ une base de E , et soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une famille de n vecteurs de E . On sait que chaque vecteur de la famille $\mathcal{F}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Définition 4.2.1 On appelle déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème 4.2.5 La famille $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

.

4.3 Sous matrices Mineurs et Mineurs principaux

Soit une matrice carrée $A = (a_{ij})$ de taille n . Considérons r lignes et r colonnes arbitraires de A . En d'autres termes, considérons un ensemble quelconque $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ d'indices de lignes et un ensemble $J = (j_1, j_2, \dots, j_r)$ d'indices de colonnes. I et J définissent une sous matrice $r \times r$ de A que l'on note $A(I, J)$ obtenu en supprimant de A les lignes dont les indices n'appartiennent pas à I et les colonnes dont les indices n'appartiennent pas à J . On alors :

$$A(I, J) = (a_{st}, s \in I, t \in J)$$

et le déterminant $\det A(I, J)$ est appelé **mineur d'ordre r** de la matrice A et la quantité

$$(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_r+j_1+j_2+\dots+j_r} \det A(I, J)$$

est appelée **mineur signé correspondant**. Notons qu'un mineur d'ordre $n-1$ est un mineur au sens précédemment défini et le mineur signé correspondant est un cofacteur. De plus si I' et J' désignent respectivement les indices des lignes et des colonnes restantes, alors

$$\det A(I', J')$$

est appelé mineur complémentaire de $\det A(I, J)$.

Exemple 4.3.1 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 6, et soit $I = \{1, 2, 4\}$ et $J = \{2, 3, 6\}$, alors $I' = \{3, 5, 6\}$ et $J' = \{1, 4, 5\}$ le mineur correspondant et son mineur complémentaire sont :

$$\det A(I, J) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{16} \\ a_{22} & a_{23} & a_{26} \\ a_{42} & a_{43} & a_{46} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \det A(I', J') = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{51} & a_{54} & a_{55} \\ a_{61} & a_{64} & a_{65} \end{vmatrix}$$

Mineurs principaux

Définition 4.3.1 *Un mineur est dit principal si ses indices des lignes et des colonnes sont les mêmes, autrement dit, si les éléments diagonaux du mineurs sont les éléments diagonaux de la matrice elle même.*

Exemple 4.3.2 *Calculer les mineurs principaux d'ordre 2 de la matrice :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution:

Une matrice carrée d'ordre 3 possède exactement 3 mineurs principaux. On a

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -14$$

4.4 Applications du calcul du déterminant

4.4.1 Inverse d'une Matrice

Matrice de cofacteurs et matrice adjointe

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée sur un corps $\mathbb{K}$, soit C_{ij} le cofacteur de l'élément a_{ij} . On appelle matrice adjointe de A notée $\text{adj}(A)$, la matrice transposée de la matrice des cofacteurs de A :

$$\text{adj}(A) = {}^t(C_{ij})$$

Exemple 4.4.1 *Soit*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

. Déterminons la matrice adjointe de B .

Solution:

Les cofacteurs des neuf éléments sont les suivants :

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18, \quad |A_{12}| = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2, \quad |A_{13}| = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$|A_{21}| = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -11, \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 14, \quad |A_{23}| = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad |A_{32}| = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

L'adjointe de B est la transposée de la matrice des cofacteurs ci-dessus, soit :

$$\text{adj}(B) = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Théorème 4.4.1 Soit A une matrice carrée d'ordre n . Alors on a :

$$A \cdot (\text{adj} A) = (\text{adj} A) \cdot A = \det A \cdot I_n .$$

On en déduit que :

1. La matrice A est inversible $\iff \det A \neq 0$
2. Si la matrice A est inversible ($\det A \neq 0$) alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$$

Remarque 4.4.1 Dans le cas d'une matrice carrée d'ordre 2, ce résultat fournit une formule facile à retenir pour l'inverse : Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible, c'est-à-dire si $ad - bc \neq 0$ alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Exemple 4.4.2 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$ et B la matrice de l'exemple précédent. Montrer que les matrices A et B sont inversibles et calculer leurs inverses.

Solution:

On a $\det A = 8 - 10 = -2 \neq 0 \implies$ la matrice A est inversible et on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons $\det B$. On a :

$$\det B = -40 + 6 + 0 - 16 + 4 + 0 = -46 \neq 0$$

Donc B est inversible.

Calculons B^{-1} . D'après le théorème précédent on a :

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \text{adj}(B) = \frac{-1}{46} \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

□

4.4.2 Déterminant d'un système de n vecteurs en dimension n

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E . Notons $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E .

Définition 4.4.1 On appelle *déterminant du système* $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, le déterminant de la matrice dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs u_i , $i = 1, \dots, n$ dans la base $\mathcal{B}$. Il est noté :

$$\det(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

On le théorème suivant :

Théorème 4.4.2 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E
2. La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est libre
3. la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est génératrice
4. $\det(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0$

Exemple 4.4.3 Montrer que la famille

$$(u_1 = (-1, 1, 2, -3), u_2 = (0, 2, -1, -2), u_3 = (1, -1, 2, 4), u_4 = (0, 0, 1, 2))$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

Solution:

Puis que la famille $(u_1 = (-1, 1, 2, -3), u_2 = (0, 2, -1, -2), u_3 = (1, -1, 2, 4), u_4 = (0, 0, 1, 2))$ possède 4 vecteurs et que la dimension de $\mathbb{R}^4$ est 4, il suffit de montrer que cette famille est libre, il suffit alors de montrer que son déterminant est non nul. On a :

$$\det(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

On alors $\det(u_1, u_2, u_3, u_4) = -14 \neq 0$. Cette famille est donc une base de $\mathbb{R}^4$. $\square$

4.5 TD sur le déterminant

Exercice 4.5.1 Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1. \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} & 5. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} & 7. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} & 4. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} & 6. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & 8. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 4.5.2 Soit $\Delta(x) = \det(a_{i,j}(x))$ de taille $n = 2$ ou 3 avec $a_{i,j}$ des fonctions dérivables.

1. Montrer que $\Delta'(x)$ est la somme des n déterminants obtenus en remplaçant successivement dans $\Delta(x)$ chaque colonne par sa dérivée.

$$2. \text{ Calculer } \begin{vmatrix} x + a_1 & x & x \\ x & x + a_2 & x \\ x & x & x + a_3 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} 1 + x & 1 & 1 \\ 1 & 1 + x & 1 \\ 1 & 1 & 1 + x \end{vmatrix}.$$

Exercice 4.5.3 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ et déterminer la condition d'inversibilité de la matrice.

Exercice 4.5.4 La famille $(2, 1, 0)$, $(1, 3, 1)$, $(5, 2, 1)$ est-elle libre ?

Exercice 4.5.5 Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Calculer alors, suivant la valeur du paramètre m , le rang de cette matrice.

Chapitre 5

Systèmes Linéaires

5.1 Les différentes présentations d'un système d'équations linéaires

5.1.1 Présentation classique

On considère une famille de $n \times p$ nombres a_{ij} , $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$, puis p nombres b_i , $1 \leq i \leq p$. On considère le système d'équations

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases},$$

où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. (S) est un système de p équations linéaires à n inconnues (les nombres $x_1, \dots, x_n$).

On peut aussi ne considérer qu'il n'y a qu'une inconnue, le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$.

Le système est dit homogène si et seulement si $b_1 = \dots = b_p = 0$.

Le système homogène associé au système (S) est

$$(Sh) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases},$$

Résoudre le système (S) , c'est trouver tous les n-uplets $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ vérifiant (S) . Jusqu'à la fin du chapitre, on notera (S) (resp. (Sh)) l'ensemble des solutions du système (S) (resp. (Sh)).

Le système (S) est dit compatible si et seulement si $S \neq \emptyset$. On note qu'un système homogène est toujours compatible car le n-uplet $(0, \dots, 0)$ est toujours solution d'un système homogène.

5.1.2 Ecriture matricielle d'un système

Le système linéaire (S) ci-dessus est équivalent à l'expression matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Résoudre (S) , c'est à dire trouver toutes les éventuelles solutions de (S) , revient à résoudre l'équation matricielle

$$A\vec{x} = B$$

d'inconnue $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$. Le rang de A est le rang du système (S) . On dit dans

ce cas que le système est un système (n, p, r) (n inconnues, p équations, de rang r).

Si $B \in \text{Im}(A)$, alors (S) est compatible et si $B \notin \text{Im}(A)$, alors (S) n'est pas compatible.

Si de plus A est une matrice carrée (systèmes ayant autant d'équations que d'inconnues), le déterminant du système (S) est le déterminant de A .

5.1.3 Avec une application linéaire

On sait qu'une matrice est canoniquement associée à une application linéaire. En d'autres termes, puis que la matrice A du système (S) est un élément de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, on peut considérer que la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ par rapport à leurs bases canoniques. On appellera alors noyau de la matrice A , le noyau de son endomorphisme associé. On le note $\ker(A)$ Soit donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A . Alors on a

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ est solution de } (S) \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \iff f(x) = b$$

Ainsi, (S) est compatible si et seulement si $\exists x \in \mathbb{K}^m / f(x) = b$ si et seulement si $b \in \text{Im}(A)$.

5.2 Systèmes de Cramer

Définition 5.2.1 *Un système (n, p, r) est dit de Cramer (on dit aussi cramérien) si et seulement si $n = p = r$. Un résultat immédiat est*

Théorème 5.2.1 *Le système (S) est un système de Cramer si et seulement si $\det(S) \neq 0$.*

Théorème 5.2.2 *Un système de Cramer admet une et une seule solution. En particulier, un système de Cramer homogène admet une et une seule solution à savoir la solution nulle $(0, \dots, 0)$.*

Preuve: Notons A la matrice du système (S) . Puisque $n = p$, A est une matrice carrée. Puisque $r = n$, A est inversible. Mais alors, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, $AX = B \iff X = A^{-1}B$. Ceci montre l'existence et l'unicité de la solution. $\square$

Dans le théorème qui suit, on note $C_1, \dots, C_n$, les colonnes de la matrice A .

Théorème 5.2.3 (Formules de Cramer) *Soit $(S) : AX = B$ un système de Cramer à n équations. Soit $X_0 = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ l'unique solution du système (S) . Alors,*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \forall i = 1, \dots, n;$$

où

$$\Delta = \det(A) = \det(C_1, \dots, C_n)$$

est le déterminant du système (S) et pour

$$\Delta_i = \det(C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n).$$

Preuve: : Admise

□

Exemple 5.2.1 Résoudre par la méthode Cramer le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

Solution:

Le système s'écrit

$$AX = B \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta = 5, \quad \Delta_1 = 20, \quad \Delta_2 = -10, \quad \Delta_3 = 15$$

$$S = \{(4, -2, 3)\}$$

Exercice 5.2.1 Résoudre suivant les valeurs du paramètre réel m le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + my + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (m - 5)z = 7 \end{cases}.$$

Exemple 5.2.2 Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = j^2 \\ x + jy + j^2z = j \\ x + j^2y + jz = 1 \end{cases} \quad \text{où} \quad j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Le déterminant du système (S) est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = 3(j^2 - j) \neq 0.$$

Le système (S) est un système de Cramer et admet donc un et un seul triplet solution (x, y, z) . Les formules de Cramer donnent ;

$$\Delta x = \Delta_1 = \begin{vmatrix} j^2 & 1 & 1 \\ j & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta y = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & j^2 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & j \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta z = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & j^2 \\ 1 & j & j \\ 1 & j^2 & 1 \end{vmatrix} = j^2.$$

Donc,

$$S = \{(0, 0, j^2)\}$$

(ce qui était clair dès le départ).

5.3 Résolution d'un système. Structure de l'ensemble des solutions

5.3.1 Structure de l'ensemble des solutions

Proposition 5.3.1 *Si le système est homogène ($b_i = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$), alors l'ensemble des solutions du système*

$$S = \ker A$$

.

On remarque alors que le système admet au moins une solution lorsqu'il est homogène. i.e. (S_0) est toujours compatible : $0_{\mathbb{K}^n}$ est toujours solution.

Théorème 5.3.1 *Si $b \in \text{Im}(f)$, soit $x^0 \in \mathbb{K}^n$ tel que $f(x^0) = b$. Alors l'ensemble des solutions du système linéaire (S) est*

$$\mathcal{S} = x_0 + \ker f = \{x_0 + y, y \in \ker f\}.$$

$\ker f$ est donné par la résolution du système homogène (S_0) qui correspond à l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{0}$.

Démonstration :

- Si $y \in \ker f$, $f(x_0 + y) = f(x_0) = b$ d'où $x_0 + y \in \mathcal{S}$.
- Réciproquement, si x est solution du système linéaire (S) , alors

$$f(x) = b = f(x_0) \text{ car } x^0 \text{ est aussi solution.}$$

D'où $f(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 \in \ker f$ et puisque $x = x_0 + (x - x_0)$, on conclut que $x \in x_0 + \ker f$.

□

Remarque 5.3.1 *Pour résoudre le système (S) , il suffit de :*

- résoudre (S_0) i.e trouver $\ker(A)$, et de
- connaître une solution particulière.

Exemple 5.3.1 *Déterminer l'ensemble solution du système linéaire :*

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ -x + 2y + z &= 0 \end{cases}$$

Solution:

ce système est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque $(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 3)$ est une solution particulière du système. Déterminons le noyau de A .
On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ z = -\frac{3}{2}y \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ y \\ -\frac{3}{2}y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Ceci nous permet d'écrire la solution du système sous la forme :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}y \\ -\frac{5}{3} + y \\ 3 - \frac{3}{2}y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Théorème 5.3.2 Désignons par r le rang de la matrice A , c'est-à-dire

$$r = \text{rg}(f) = \text{rg}A$$

qu'on définit comme étant le rang du système (S) . On a alors, d'après le théorème du rang,

$$\dim \ker f = p - r$$

- Si $r = p$, alors $\ker f = \{0\}$ donc f est injective $\implies (S)$ admet au plus une solution.
- Si $r < p$, alors $\dim \ker f \geq 1$ et $\ker f$ est infini. Deux cas se présentent :
 - si $b \in \text{Im}(f)$, alors (S) admet une infinité de solutions
 - si $b \notin \text{Im}(f)$, (S) est incompatible.

Remarque 5.3.2 Du théorème précédent, on déduit alors que le système linéaire (S) admet :

- Soit aucune solution
- soit une solution unique
- soit une infinité de solutions.

Comme conséquence on déduit aussi que, si un système linéaire admet au moins 2 solutions, alors il en admet une infinité.

5.4 Méthodes de résolution d'un système linéaire : Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de **Gauss** consiste, au moyen d'opérations élémentaires opérant exclusivement sur les lignes, et au prix d'une éventuelle permutation des inconnues, à transformer (S) en un système linéaire (S') équivalent, c'est à dire possédant les mêmes solutions que (S) . La matrice A' de (S') est de plus idéalement du type :

$$A' = \begin{pmatrix} m_{1,1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & m_{2,2} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{r,r} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $\forall i \in \{1, \dots, m\}, m_{i,i} \neq 0$. On a alors nécessairement

$$r = rg(A') = rg(A) = rg(S)$$

Le système $A'\vec{x} = b'$ est particulièrement simple à résoudre, mais on distingue ici plusieurs cas.

1^{er} cas : $r = p \leq n$ (S') est alors du type :

$$\begin{cases} m_{1,1}x_1 + \dots + m_{1,p}x_p = \beta_1 \\ \vdots \\ m_{p,p}x_p = \beta_p \\ 0 = \beta_{p+1} \\ \vdots \\ 0 = \beta_n \end{cases}$$

Les équations $(0 = \beta_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ sont les équations de compatibilité de (S). Si $\exists j \in \{p+1, \dots, m\}$ tel que $\beta_j \neq 0$, alors (S') et (S) sont incompatibles.

Si $\forall i \in \{p+1, \dots, m\}, \beta_i = 0$, alors les équations de compatibilité peuvent être retirées du système car toujours vraies et le système restant se résout aisément en « remontant ».

2^e cas : $r = n \leq m$ (S') est alors du type :

$$\begin{cases} m_{1,1}x_1 + \dots + m_{1,n}x_n + \dots + m_{1,p}x_p = \beta_1 \\ \vdots \\ m_{n,n}x_n + \dots + m_{n,p}x_p = \beta_p \end{cases}$$

On appelle alors $x_1, x_2, \dots, x_p$ les inconnues principales et $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_m$ les inconnues secondaires. On pose $\forall i \in \{n+1, \dots, m\}, x_i = \lambda_i$ pour marquer le fait qu'on prend les inconnues secondaires pour paramètres et on résout par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_p$. On a toujours dès que $p > n$ une infinité de solution.

Exemple Prenons $n = 2, p = 4$,

$$(S) : \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ y + z - t = 2 \end{cases}$$

On prend z et t pour paramètres. Ainsi,

$$(x, y, z, t) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 + z - t \\ y = 2 + t - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2(z - t) \\ y = 2 + t - z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } \mathcal{S} &= \{(-1 + 2(z - t), 2 + t - z, z, t), z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-1, 2, 0, 0) + z(2, -1, 0, 0) + t(-2, 1, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= (-1, 2, 0, 0) + \text{vect}\{(-2, 1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

3^e cas : $r = p = n$ On a alors tout de suite, d'après la forme de A' , A' est inversible donc

$$A'\vec{x} = b' \Leftrightarrow \vec{x} = A'^{-1}b'$$

(S) a donc une unique solution, on parle de système de **Cramer**. La résolution de ce système triangulaire¹ est immédiate.

4^e cas : en général, $r < \min(n, p)$ S' est du type

$$\begin{cases} m_{1,1}x_1 + \cdots + m_{1,n}x_n + \cdots + m_{1,p}x_p = \beta_1 \\ \vdots \\ m_{1,n}x_n + \cdots + m_{p,p}x_p = \beta_p \\ 0 = \beta_{p+1} \\ \vdots \\ 0 = \beta_n \end{cases}$$

Pour $i \in \{r+1, \dots, m\}$, $0 = \beta_i$ est une équation de compatibilité de (S'), et donc de (S).

Si les conditions de compatibilité sont vérifiées, on est ramené au deuxième cas avec r à la place de m .

5.5 TD sur les systèmes linéaires

Exercice 5.5.1 Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 5.5.2 Sans chercher à résoudre les systèmes suivants, discuter la nature de leurs ensembles de solution :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 5.5.3 Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$, $n+1$ réels distincts, et $y_0, y_1, \dots, y_n$, $n+1$ réels (distincts ou non).

Montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(x_i) = y_i$$

Exercice 5.5.4 Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$(S_1) \begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ mx + (m+4)y = 3 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (m+1)x - my = 5m+3 \end{cases}$$

1. On remarque que dans ce cas, la matrice A' est aussi triangulaire supérieure.

Exercice 5.5.5 Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 :

$$\begin{aligned} (S_1) \quad \begin{cases} x + 3y + 4z + 7t &= b_1 \\ x + 3y + 4z + 5t &= b_2 \\ x + 3y + 3z + 2t &= b_3 \\ x + y + z + t &= b_4 \end{cases} & (S_2) \quad \begin{cases} x + 3y + 5z + 3t &= b_1 \\ x + 4y + 7z + 3t &= b_2 \\ y + 2z &= b_3 \\ x + 2y + 3z + 2t &= b_4 \end{cases} \\ (S_3) \quad \begin{cases} x + y + 2z - t &= b_1 \\ -x + 3y + t &= b_2 \\ 2x - 2y + 2z - 2t &= b_3 \\ 2y + z &= b_4 \end{cases} & (S_4) \quad \begin{cases} x + 2y + z + 2t &= b_1 \\ -2x - 4y - 2z - 4t &= b_2 \\ -x - 2y - z - 2t &= b_3 \\ 3x + 6y + 3z + 6t &= b_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 5.5.6 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d :

$$(S) \quad \begin{cases} (1 + \lambda)x + y + z + t &= a \\ x + (1 + \lambda)y + z + t &= b \\ x + y + (1 + \lambda)z + t &= c \\ x + y + z + (1 + \lambda)t &= d \end{cases}$$

Exercice 5.5.7 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ et a :

$$(S) \quad \begin{cases} 3x + 2y - z + t &= \lambda \\ 2x + y - z &= \lambda - 1 \\ 5x + 4y - 2z &= 2\lambda \\ (\lambda + 2)x + (\lambda + 2)y - z &= 3\lambda + a \\ 3x - z + 3t &= -\lambda^2 \end{cases}$$

Exercice 5.5.8 Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

$$\begin{aligned} 1. \quad \begin{cases} 2x + y + z &= 3 \\ 3x - y - 2z &= 0 \\ x + y - z &= -2 \\ x + 2y + z &= 1 \end{cases} & 3. \quad \begin{cases} 2x + y + z + t &= 1 \\ x + 2y + 3z + 4t &= 2 \\ 3x - y - 3z + 2t &= 5 \\ 5y + 9z - t &= -6 \end{cases} & 5. \quad \begin{cases} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 0 \\ 3x + y + 2z &= 0 \end{cases} \\ 2. \quad \begin{cases} x + y + z + t &= 1 \\ x - y + 2z - 3t &= 2 \\ 2x + 4z + 4t &= 3 \\ 2x + 2y + 3z + 8t &= 2 \\ 5x + 3y + 9z + 19t &= 6 \end{cases} & 4. \quad \begin{cases} x - y + z + t &= 5 \\ 2x + 3y + 4z + 5t &= 8 \\ 3x + y - z + t &= 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 5.5.9 Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 5.5.10 Résoudre et discuter le système linéaire suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 7x_5 &= b_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 8x_5 &= b_3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 14x_5 &= b_4 \end{cases}$$

Exercice 5.5.11 On considère l'application f de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ qui à un élément $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ associe l'élément $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, défini par :

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 7x_5 = y_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 8x_5 = y_3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 14x_5 = y_4 \end{cases}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. On considère A l'ensemble des solutions de (S_H) .

$$(S_H) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 8x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 14x_5 = 0 \end{cases}$$

Quelle est la nature de A ? Que représente A pour l'application f ? Donner une base de A ; quelle est la dimension de A ? Donner un système minimal d'équations qui définissent A .

3. Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs : $V_1 = (1, 1, 1, 1)$, $V_2 = (1, 2, 3, 4)$, $V_3 = (3, 1, 4, 2)$, $V_4 = (10, 4, 13, 7)$, $V_5 = (1, 7, 8, 14)$. Que représentent ces vecteurs pour l'application f ? Trouver une base de $\text{Im} f$.
4. On considère le système (S) où les inconnues sont les x_i , et où les y_j sont des paramètres. Comment interpréter les conditions de possibilité de ce système du point de vue de f ?
5. Donner une interprétation du théorème du rang relativement à ce système. Quel est le lien entre le rang de f et le rang du système ?

Exercice 5.5.12 Pour tout a réel, on considère la matrice A et le système linéaire (S) définis par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad (S) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = 1 \\ x + y + az + t = 1 \\ x + y + z + at = 1 \end{cases}$$

aux inconnues réelles x, y, z, t .

1. Discuter le rang de A suivant les valeurs de a .
2. Pour quelles valeurs de a le système (S) est-il de Cramer ? Compatible ? Incompatible ?
3. Lorsqu'il est de Cramer, résoudre (S) avec un minimum d'opérations (on pourra montrer d'abord que l'on a nécessairement $x = y = z = t$).
4. Retrouver 3. par application des formules de Cramer.

Exercice 5.5.13 Déterminer le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 5.5.14 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\exists X \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ tel que $AX = \lambda X$. Pour chaque λ déterminer $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = \lambda X\}$.

Exercice 5.5.15 Donner une base de l'ensemble des solutions de
$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}.$$

Exercice 5.5.16 Résoudre suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ a^2x + y + az = 0 \\ ax + a^2y + z = 0 \end{cases}.$$

Exercice 5.5.17 Résoudre suivant les valeurs de a et $\mu \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = \mu \\ x + y + az + t = \mu^2 \\ x + y + z + at = \mu^3 \end{cases}.$$

Exercice 5.5.18 Inverser en utilisant un système linéaire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 5.5.19 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ des éléments (x, y, z, t) qui satisfont :

$$\begin{cases} x + y + z + 3t = 0 \\ 2x + 3y + 4t = 0 \\ 2x + 5y - 4z = 0 \end{cases}$$

Donner une base de F et sa dimension.

Exercice 5.5.20 On considère le système

$$(S) : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - 2z + 2t = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

1. Résoudre le système (S) puis indiquer son rang.
2. Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, indiquer sa dimension et en donner une base.